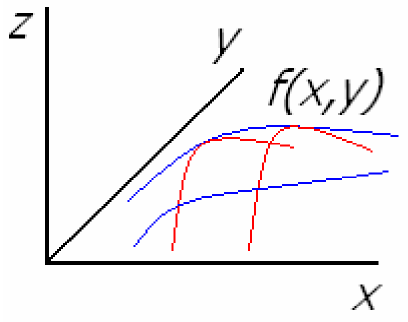
2006 年 5 月 25 日（木）実施

偏微分と中心差分法

・偏微分



偏導関数 $f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_x(x,y)$ （z の x による偏微分）

は y の値を固定して，x 方向について微分したものである。更に，この $f_x(x,y)$ を x 方向について微分したものは $f_{xx}(x,y)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$y$ 方向について微分したものは $f_{yx}(x,y)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ と表す。

物理学では，位置座標 (x,y,z) の各点に定義される物理量［例えば温度 $T(x,y,z)$］を扱うので，一般的には偏微分方程式を解く必要がある。

・中心差分法

二階の偏導関数は $f_{xx}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f_x(x+\Delta x,y)-f_x(x,y)}{\Delta x}$ であるが，これに

$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x,y)-f(x,y)}{-\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(x-\Delta x,y)}{\Delta x}$ を代入すると，

$f_{xx}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-2f(x,y)+f(x-\Delta x,y)}{(\Delta x)^2}$ と表せるので，この近似値を差分で表すと，$f_{xx}(x,y)\cong\dfrac{f(x+\Delta x,y)-2f(x,y)+f(x-\Delta x,y)}{(\Delta x)^2}$ となる。

<u>例題</u>

図のような細長い棒の全体の温度を均一に 0℃としておき，時刻 $t=0$ のとき，その一端を 100℃のお湯に接触させ，他端を 0℃の氷に接触させる。このとき，棒の各点，各時刻の温度 $u(x,t)$ は，温度伝導率を κ とすると，熱伝導方程式 $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\kappa\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ を解いて得られる。初期条件を $u(x,0)=0\ (x\neq 0)$，境界条件を $u(0,t)=100$，$u(1,t)=0$，温度伝導率を $\kappa=3.0\times 10^{-5}$ m²/s として，棒の各点，各時刻の温度を求める C プログラムを作成し，翻訳編集して実行する。

【解法】 区間 $0\le x\le 1$ を M 等分し，端点及び分点を $x_0,x_1,\cdots,x_M$ とする。ここで，$x_0=0$，$x_M=1$，$\Delta x=1/M$ である。時間は $0\le t\le T$ まで計算するとして，この区間を同様に N 等

分する。$u(x_m, t_n) = u(m\Delta x, n\Delta t)$ の値を $u_{m,n}$ とする。時間による偏微分をオイラー法で近似し，位置座標による 2 階の偏微分を中心差分法で近似すると，熱伝導方程式は

$\dfrac{1}{\Delta t}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) = \dfrac{\kappa}{(\Delta x)^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n})$ となる。これを $u_{m,n+1}$ について解くと，

$u_{m,n+1} = (1 - 2\alpha\, u_{m,n}) + \alpha(u_{m+1,n} + u_{m-1,n})$ となる。ここで，$\alpha = \dfrac{\kappa \Delta t}{(\Delta x)^2}$ である。

＊この場合に，差分法による近似は，$\alpha \leq \dfrac{1}{2}$ のとき安定であることが知られている。

<u>ex5-1.c</u>

```
#include <stdio.h>

#define M 100
#define N 100
#define T 120.0
#define K 3.0e-5

int main(void)
{
    int m,n;
    double u[M+1][N+1],dt,dx,a;
    FILE *output;

    dt=T/N;
    dx=1.0/M;
    a=K*dt/(dx*dx);

    output=fopen("heat.data","w");

    for (m=1;m<=M;m++) {
        u[m][0]=0.0;
    }

    for (n=0;n<=N;n++) {
        u[0][n]=100.0;
        u[M][n]=0.0;
    }

    for (n=0;n<N;n++) {
        for (m=1;m<M;m++) {
            u[m][n+1]=(1-2*a)*u[m][n]+a*(u[m+1][n]+u[m-1][n]);
        }
    }
```

```
    for (n=0;n<=N;n++) {
        for (m=0;m<=M;m++) {
            fprintf(output,"%f %E %f¥n",dx*m,dt*n,u[m][n]);
        }
        fprintf(output,"¥n");
    }

    fclose(output);

    return 0;
}
```