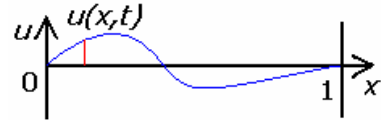


2006 年 6 月 8 日 (木) 実施

波動方程式

例題

図のような弦の各点, 各時刻の変位 $u(x,t)$ は, 波動として伝播し, その位相速度を c とすると, 波動方程式



$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ を解いて得られる。初期条件を $u(x,0) = \sin(4\pi x)$ ($0 \leq x < \frac{1}{4}$),

$u(x,0) = 0$ ($\frac{1}{4} \leq x$), $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0$ ($t = 0 ; 0 \leq x \leq 1$), 境界条件を $u(0,t) = u(1,t) = 0$,

位相速度を $c = 1 \text{ m/s}$ として, 弦の各点, 各時刻の変位を求める C プログラムを作成し, 翻訳編集して実行する。

【解法】 波動方程式を $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = cv(x,t)$, $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ のように, 時間について

の 1 階連立微分方程式に書き直す。区間 $0 \leq x \leq 1$ を M 等分し, 端点及び分点を x_0, x_1, \dots, x_M とする。ここで, $x_0 = 0$, $x_M = 1$, $\Delta x = 1/M$ である。時間は $0 \leq t \leq T$ まで計算するとして, この区間を同様に N 等分する。 $u(x_m, t_n) = u(m\Delta x, n\Delta t)$ の値を $u_{m,n}$ とし, $v(x_m, t_n) = v(m\Delta x, n\Delta t)$ の値を $v_{m,n}$ とする。 v の時間による偏微分をオイラー法で近似し,

u の時間による偏微分を修正オイラー法で近似し, 位置座標による 2 階の偏微分を中心差分法で近似すると, 波動導方程式は $\frac{1}{\Delta t}(u_{m,n+1} - u_{m,n}) = \frac{c}{2}(v_{m,n+1} + v_{m,n})$,

$\frac{1}{\Delta t}(v_{m,n+1} - v_{m,n}) = \frac{c}{(\Delta x)^2}(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n})$ となる。これを $u_{m,n+1}$ 及び $v_{m,n+1}$ について

解くと, $u_{m,n+1} = u_{m,n} + \frac{c\Delta t}{2}(v_{m,n+1} + v_{m,n})$, $v_{m,n+1} = v_{m,n} + \alpha(u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n})$ となる。

ここで, $\alpha = \frac{c\Delta t}{(\Delta x)^2}$ である。

ex6-1.c

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define PI 4*atan(1.0)
#define M 160
#define N 160
#define T 0.08
```

自然科学シミュレーション ノート

```
int main(void)
{
    int m,n,i;
    double u[M+1][N+1],v[M+1][N+1],dt,dx,a;
    FILE *output[5];

    dt=T/N;
    dx=1.0/M;
    a=dt/(dx*dx);

    output[0]=fopen("string0.data","w");
    output[1]=fopen("string1.data","w");
    output[2]=fopen("string2.data","w");
    output[3]=fopen("string3.data","w");
    output[4]=fopen("string4.data","w");

    for (m=1;m<40;m++) {
        u[m][0]=sin(4.0*PI*m*dx);
    }

    for (m=40;m<M;m++) {
        u[m][0]=0.0;
    }

    for (m=0;m<=M;m++) {
        v[m][0]=0.0;
    }

    for (n=0;n<=N;n++) {
        u[0][n]=0.0;
        u[M][n]=0.0;
    }

    for (n=0;n<N;n++) {
        for (m=1;m<M;m++) {
            v[m][n+1]=v[m][n]+a*(u[m+1][n]-2*u[m][n]+u[m-1][n]);
            u[m][n+1]=u[m][n]+dt/2.0*(v[m][n+1]+v[m][n]);
        }
    }

    for (i=0;i<5;i++) {
        for (m=0;m<=M;m++) {
            fprintf(output[i],"%f %f¥n",dx*m,u[m][40*i]);
        }
    }
}
```

自然科学シミュレーション ノート

```
    for (i=0;i<5;i++) {  
        fclose(output[i]);  
    }  
  
    return 0;  
}
```