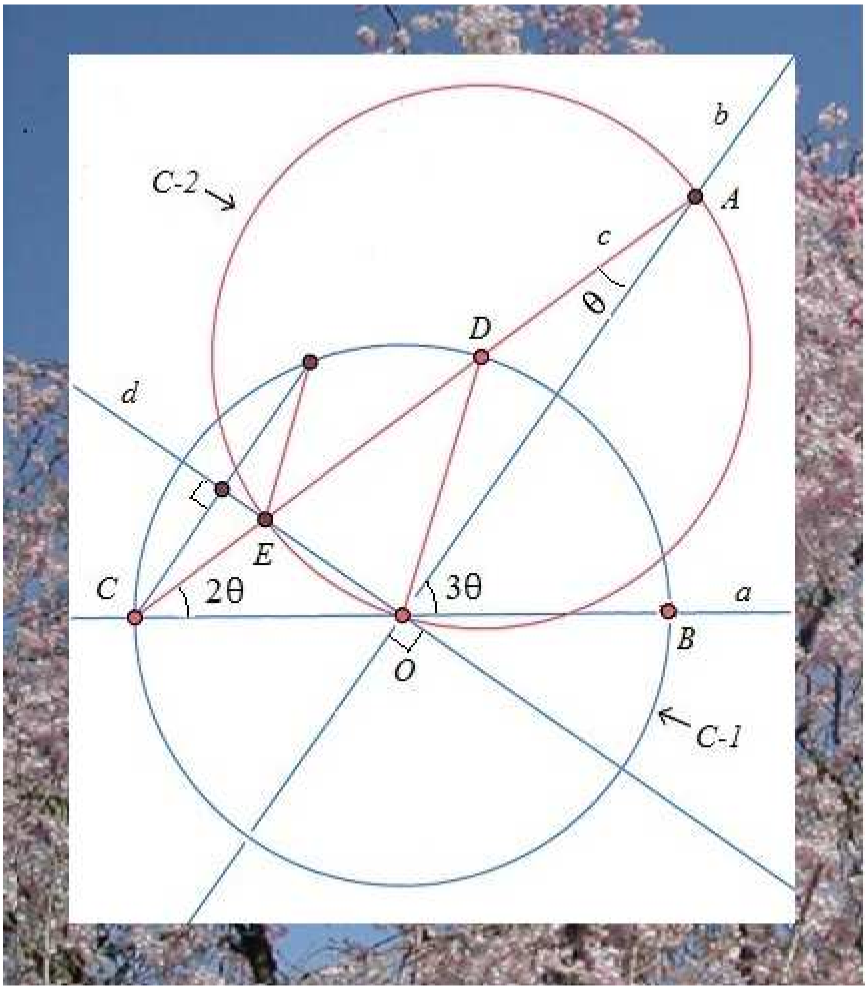
Pascal のリマソン(limaçon)に基づく
角の 3 等分の作図プロセス



2023.11

工博 山田隆夫 著

SEA 耐震技術アソシエイツ

はじめに

ギリシャの紀元前 300 年以来のユークリッド幾何学における有名な 3 大作図問題の 1 つに「角の 3 等分」があると言う。与えられた角 3θ の 3 等分の角度を定規とコンパスで作図により求める幾何学問題です。然しながら、ここでは、3 等分された角度の存在範囲は狭角 3θ の内部に制限されている訳ではありません。

1837 年にドイツの数学者 Wantzel は、「幾何学の問題を代数学の場の理論に置き換えて、3 等分すべき角度を狭角 3θ の領域で考え、3 等分された角度 θ は余弦の 3 倍角の公式を定規とコンパスで解けないから、角の 3 等分は不可能である」と断定しました。Wantzel の考えに基づいて、19 世紀の中頃、フランスの科学アカデミーは「3 等分に関する論文を受理しない」と公表しました。日本数学会の公式見解も同じで、矢野健太郎の著書「角の三等分」に影響されたのでしょう。[1] 矢野は「長さを表わす印(しるし)を付けずに直線を引くためにのみ定規を用い、円を描くためにのみコンパスを用いたのでは角の 3 等分は出来ない」と結論付けました。[2]
ここで、矢野の説明に用いた円の中心の位置は 3 等分するべき角を構成する直線の交点なので初めから問題にしていません。

17 世紀中頃、フランスの数学者 Pascal (1623-1662)はリマソン(蝸牛線 *limaçon*)を発見し、3 等分の角度に対応した点がリマソンの線上あることから、角の 3 等分が一般的に可能であることを発見しました。Pascal は 3 等分された角度は、狭角 3θ の内部でなく外部に作成されることを示し、この角度は余弦の 3 倍角の公式の代数的関係を自動的に満足することを証明しました。

実は、矢野の著書「角の三等分」にもリマソンに関する一般的記述がありますが、本書の基本事項に述べる補助円の中心の位置を決めるプロセスに関する記述はありません。

佐藤宏一は著書で次のように述べています。「対話型幾何学ソフトウェアである Cinderella は、コンパスや定規の代わりに、コンピュータと対話をしながら図形を描く、図形の性質を保ったまま変形、回転、移動をおこなう、･･･さらに点の軌跡を描く機能もあるので、様々な図形を描きながら平面幾何学を学ぶことができる。」[3]

本書は 3θ が未知のとき、リマソンの正確な幾何学的位置が Cinderella を利用することによって如何にして求められるかを解り易く説明しました。[4] 図形上の 2 直線によって形成される交角の大きさは Cinderella によって得られます。

Cinderella は現在、Microsoft の system 更新により、Windows 7 迄しか利用できないようです。Cinderella が Windows11 でも利用できるように Version up して欲しいと願う次第です。

2023 年 11 月　　著者

目 次

1　基本事項

1-1 *Pascal* のリマソン *limaçon* に基づく作図法の基本

作図上の補助的な点、線および円は Fig-1-1 の「作図法の基本条件」を満たすものとします。

(1)　O 点を通り三等分すべき角度 3θ を持つ直線 a と b を描く。

(2)　a 上に B 点をとり、中心 O・半径 OB の円 $C\text{-}1$ を描く。$C\text{-}1$ を基本円と呼びます。

(3)　$C\text{-}1$ と a の交点で O に関して B の反対側に点 C をとる。

(4)　O を通り、b に垂直な直線 d を描く。

(5)　C を通る直線 c を描き、b との交点を A、d との交点を E、$C\text{-}1$ との交点を D とする。
$\angle AOE=\angle R$ です。

C,D,A が c 上にあって、$OC=OD=DA$ のとき A の軌跡は *Blaise Pascal* (1623-1662) が発見したリマソン(蝸牛線 *limaçon*)と言います。中心 D で O,E,A,を通る円 $C\text{-}2$ を補助円と呼びます。このとき、

ΔOCD とΔDOA は 2 等辺 3 角形で、$\angle CAO=\theta$ とすれば、$\angle ACO=2\theta$,
$\angle AOB=\angle ACO+\angle CAO=3\theta$ より $\angle CAO$ は$\angle AOB$ の 3 等分の角度になる。

リマソンの原理を利用した 3 等分法は補助円 $C\text{-}2$ の中心 D を基本円 $C\text{-}1$ 上で動かしつつ、A を b 上に一致させる操作が重要です。

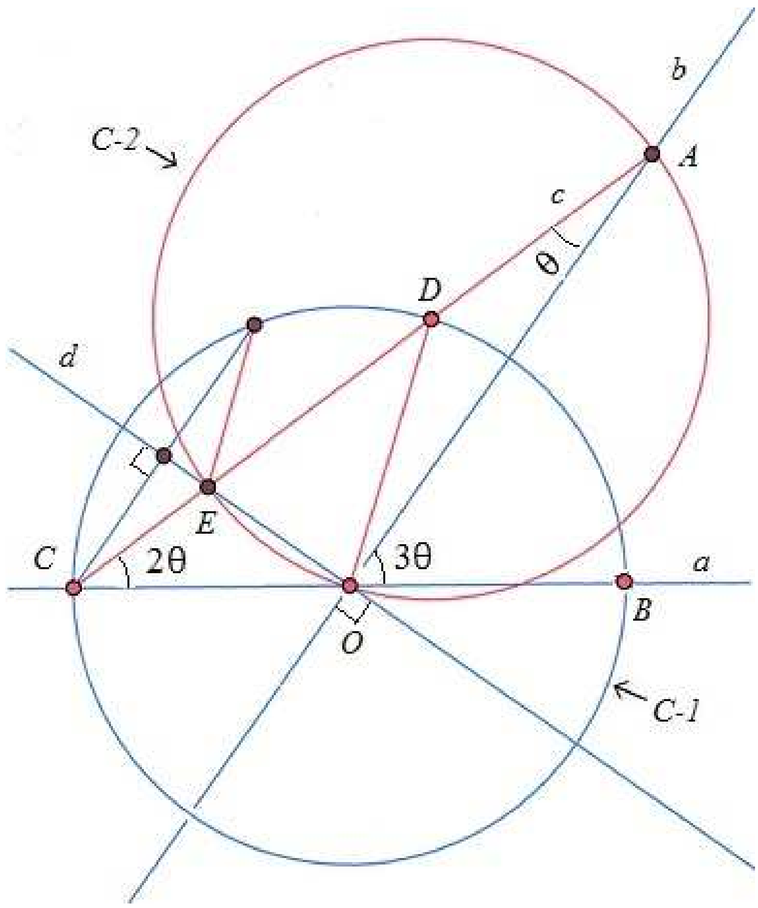


Fig-1-1　作図法の基本条件

1-2　リマソン *limaçon A* の決定過程

点、線および円は Fig-1-2 の「リマソンの決定過程」に示すものとします。

(1)　中心 *O* で任意の半径の基本円 *C-1* を描きます。
(2)　*C-1* 上に任意の点 *D'* を取ります。
(3)　中心 *D'* で *C-1* と同じ半径の補助円 *C-2'* を描きます。
(4)　*CD'* を結ぶ直線 *c'* と直線 *b* の交点を *A'* とします。
　　A' を下方に移動するには *D'* を *C-1* 上で時計回りに動かします。
　　A' を上方に移動するには *D'* を *C-1* 上で反時計回りに動かします。
(5)　この時点では未だ、*c'* と *C-2'* の交点 *E'* は *d* 上にありません。

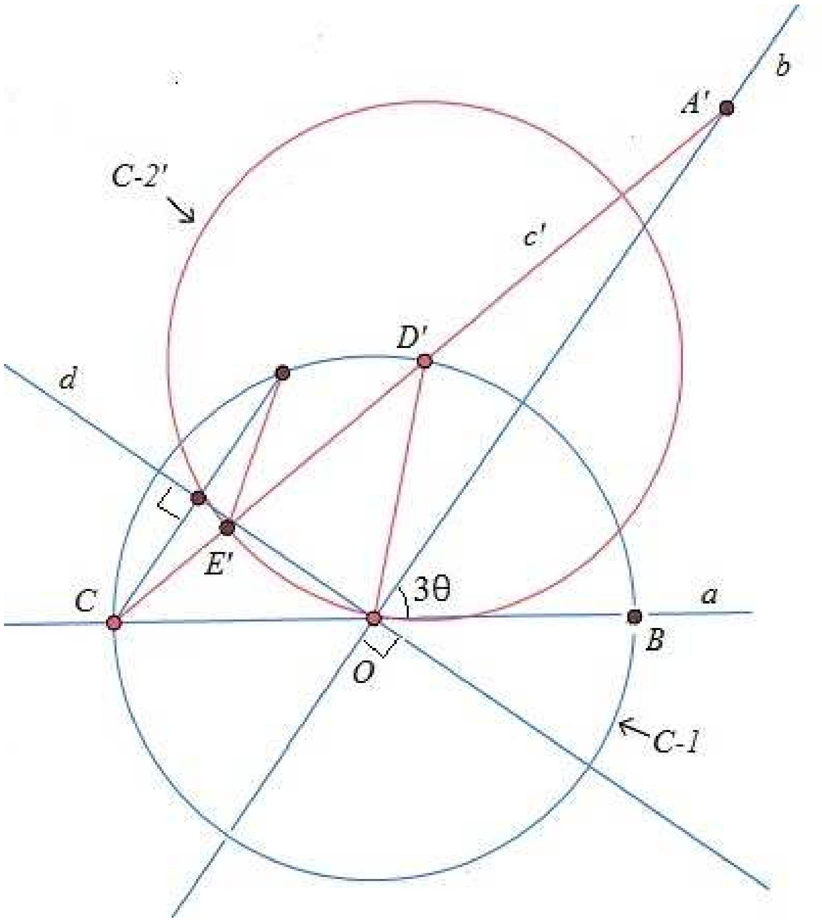


Fig-1-2　リマソン *A* の決定過程

1-3　リマソン *limaçon A* の決定解

Fig-1-2 に従って説明します。

(1)　<u>補助円 *C-2'* の中心 *D'* を *C-1* 上で動かし、*A'* を *C-2'* 上に一致させます。</u>
　　<u>これを行なうのが作図上の重要な操作です。</u>
(2)　これにより、*D'* が *D*,　*A'* が *A*,　*c'* が *c* になります。
(3)　また、*E'* が *E* になり、*E* は *d* 上にあることになります。
(4)　よって、*ED=OD=DA* となります。
(5)　∠*DAO*=∠*DOA*=θ　とすると、∠*ODC*=∠*OCD*=2θ となります。

以上から、Fig-1-1 の「作図法の基本条件」を満たす結果が得られます。

2　文　献

[1] 日本数学会ホームページ　http://wwwsoc.nii.ac.jp/msj6/faq.html

[2] 矢野健太郎:角の三等分　ちくま学芸文庫, 2006

[3] 佐藤宏一:数学の学習を支援するマルチメディア教材の開発, 私立大学情報教育協会、平成 18 年度　大学教育・情報戦略大会, https://www.juce.jp>archives>taikai_2006

[4] J.Richter-Gebert, U.H.Kortenkamp: The Interactive Geometry Software Cinderella, (シンデレラ 阿原一志訳), シュプリンガー・フェアラーク東京 2006